UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

Giuseppe Braz da Silva Marcelino

Conceitos de auto-dualidade em sólitons topológicos

São Carlos

2023

Giuseppe Braz da Silva Marcelino

Conceitos de auto-dualidade em sólitons topológicos

Trabalho de Conclusão de Curso - Monografia apresentado ao Curso de graduação em Física na habilitação Teórico-Experimental no Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo como requisito para a obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Agostinho Ferreira

São Carlos

2023

Marcelino, Giuseppe Braz da Silva
Conceitos de auto-dualidade em sólitons topológicos / Giuseppe Braz da Silva Marcelino ; Orientador Luiz Agostinho Ferreira. – São Carlos, 2023.
26 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharel em Física) – Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2023. – IFSC, Universidade de São Paulo, 2023.

1. Introdução. 2. Auto-dualidade Generalizada. 3. *Kinks* com vários campos em (1+1) dimensões. 4. *Lumps* em (2+1) dimensões. 5. (3+1) dimensões e instantons em (4+0). 6. Conclusão. I. Ferreira, Luiz Agostinho orient.. II. Título.

RESUMO

A auto-dualidade desempenha um importante papel em muitas aplicações em teorias de campos que possuem sólitons topológicos. Em geral, as equações de auto-dualidade são equações diferenciais parciais de primeira ordem tais que suas soluções satisfazem as equações de Euler-Lagrange de segunda ordem da teoria. O fato de que é necessário realizar uma integração a menos para construir sólitons auto-duais, comparado com os sólitons topológicos usuais, não é ligado ao uso de alguma quantidade dinamicamente conservada. É importante que a carga topológica seja representável em forma integral, e assim exista uma densidade de carga topológica. A invariância homotópica da carga topológica leva a identidades locais, na forma de equações diferenciais de segunda ordem. A relevância disso é devido a essas identidades se tornarem as equações de Euler-Lagrange da teoria quando as equações de auto-dualidade são impostas. Serão revisadas algumas importantes estruturas fundamentais do conceito de auto-dualidade, e mostrado como pode ser aplicado a *kinks*, *lumps*, monopolos, *Skyrmions* e *Instantons*.

Palavras-chave: Sólitons topológicos. Auto-dualidade. Carga topológica.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Sólitons topológicos desempenham papel fundamental no estudo de fenomênos não lineares em diversas áreas da física, eles aparecem em uma variedade de teorias, como *kinks* em $(1+1)$ dimensões, vórtices em $(2+1)$ dimensões, monopolos magnéticos e *Skyrmions* em $(3+1)$ dimensões e *Instantons* em quatro dimensões euclidianas. Os sólitons topológicos são relevantes para muitos fenômenos não lineares na física de altas energias, matéria condensada e na ciência em geral.

Dentre os sólitons topológicos existe uma classe especial, os chamados sólitons auto-duais. Eles são soluções clássicas das equações de auto-dualidade, que são equações de primeira ordem que implicam nas equações de Euler-Lagrange da teoria. Além disso, em cada setor topológico, isto é, o conjunto das soluções que possuem a mesma carga topológica associada, existe um limite inferior da energia estática, ou ação Euclidiana, e os sóltions auto-duais saturam esse limite. Portanto, os sólitons auto-duais são muito estáveis.

A razão pela qual se realiza apenas uma integração para construir os sólitons auto-duais, ao invés de duas para o caso de sóltions topológicos usuais, não está ligada a conservação de uma quantidade dinamicamente. Em todos os casos que a auto-dualidade funciona, a carga topológica relevante admite uma representação integral, ou seja, existe uma densidade de carga topológica. A invariância da carga sobre qualquer variação suave (homotópica) dos campos leva a identidades, em forma de equações diferenciais de segunda ordem, que são satisfeitas por qualquer configuração regular dos campos, não necessariamente solução da teoria. Entretanto, com a imposição das equações de auto-dualidade essas identidades se tornam as equações de Euler-Lagrange da teoria.

Utilizando o conceito de auto-dualidade generalizada se pode criar, com uma carga topológica, uma grande classe de teorias de campo contendo setores auto-duais (1). Em $(1+1)$ dimensões foi possível criar teorias de campo, com qualquer número de campos escalares, contendo sólitons topológicos, generalizando o processo conhecido para teorias com somente um campo escalar, como o modelo de *sine-Gordon* e $\lambda\phi^4$ (2).

Nesse trabalho, serão revisados os recentes desenvolvimentos e aplicações do conceito de auto-dualidade generalizada proposto em (1), de uma forma simples e concisa.[1]

[1] Será utilizada a convenção de soma em índices repetidos durante todo trabalho.

2 AUTODUALIDADE GENERALIZADA

Considere uma teoria de campos que possui uma carga topológica que admite representação integral da forma

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{2}\int d^dx \left[\mathcal{A}_\alpha\ \tilde{\mathcal{A}}^*_\alpha + \mathcal{A}^*_\alpha\ \tilde{\mathcal{A}}_\alpha\right], \tag{2.1}$$

onde $\mathcal{A}_\alpha$ e $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha$ são funcionais somente dos campos da teoria e das suas primeiras derivadas, onde $*$ se refere somente a conjugado e não transposto conjugado, α se refere a qualquer grupo de índices. O fato de $\mathcal{Q}$ ser topológico significa que ele é invariante por qualquer variação homotópica[1] dos campos. Os campos serão representados por χ_κ; eles podem ser escalares, vetoriais ou campos espinores, e o índice κ segue a mesma lógica do índice α anterior. Os campos χ_κ serão considerados reais, ou seja, caso existam campos complexos χ_κ assume a parte real e imaginária desses campos.

A invariância de $\mathcal{Q}$ sobre variações suaves dos campos leva à identidade

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{Q} = 0 \ \rightarrow \quad & \frac{\delta\mathcal{A}_\alpha}{\delta\chi_\kappa}\tilde{\mathcal{A}}^*_\alpha - \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{A}_\alpha}{\delta\partial_\mu\chi_\kappa}\tilde{\mathcal{A}}^*_\alpha\right) + \mathcal{A}_\alpha\frac{\delta\tilde{\mathcal{A}}^*_\alpha}{\delta\chi_\kappa} - \partial_\mu\left(\mathcal{A}_\alpha\frac{\delta\tilde{\mathcal{A}}^*_\alpha}{\delta\partial_\mu\chi_\kappa}\right) + \\ & \frac{\delta\mathcal{A}^*_\alpha}{\delta\chi_\kappa}\tilde{\mathcal{A}}_\alpha - \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{A}^*_\alpha}{\delta\partial_\mu\chi_\kappa}\tilde{\mathcal{A}}_\alpha\right) + \mathcal{A}^*_\alpha\frac{\delta\tilde{\mathcal{A}}_\alpha}{\delta\chi_\kappa} - \partial_\mu\left(\mathcal{A}^*_\alpha\frac{\delta\tilde{\mathcal{A}}_\alpha}{\delta\partial_\mu\chi_\kappa}\right) = 0.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Impondo as equações, de primeira ordem, de auto-dualidade nos campos

$$\mathcal{A}_\alpha = \pm\tilde{\mathcal{A}}_\alpha\ , \tag{2.3}$$

junto com a identidade (2.2), temos as equações

$$\begin{aligned}& \frac{\delta\mathcal{A}_\alpha}{\delta\chi_\kappa}\mathcal{A}^*_\alpha - \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{A}_\alpha}{\delta\partial_\mu\chi_\kappa}\mathcal{A}^*_\alpha\right) + \mathcal{A}_\alpha\frac{\delta\mathcal{A}^*_\alpha}{\delta\chi_\kappa} - \partial_\mu\left(\mathcal{A}_\alpha\frac{\delta\mathcal{A}^*_\alpha}{\delta\partial_\mu\chi_\kappa}\right) + \\ & \frac{\delta\tilde{\mathcal{A}}^*_\alpha}{\delta\chi_\kappa}\tilde{\mathcal{A}}_\alpha - \partial_\mu\left(\frac{\delta\tilde{\mathcal{A}}^*_\alpha}{\delta\partial_\mu\chi_\kappa}\tilde{\mathcal{A}}_\alpha\right) + \tilde{\mathcal{A}}^*_\alpha\frac{\delta\tilde{\mathcal{A}}_\alpha}{\delta\chi_\kappa} - \partial_\mu\left(\tilde{\mathcal{A}}^*_\alpha\frac{\delta\tilde{\mathcal{A}}_\alpha}{\delta\partial_\mu\chi_\kappa}\right) = 0.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Note que (2.4) são as equações de Euler-Lagrange associadas ao funcional

$$E = \frac{1}{2}\int d^dx \left[\mathcal{A}_\alpha\mathcal{A}^*_\alpha + \tilde{\mathcal{A}}_\alpha\tilde{\mathcal{A}}^*_\alpha\right]. \tag{2.5}$$

Portanto, equações diferenciais de primeira ordem, em conjunto com identidades topológicas de segunda ordem, implicam as equações de Euler-Lagrange de segunda ordem. Além disso, se E for positivo definido, então as soluções auto-duais saturam um limite

[1] Ou suave.

inferior na energia da seguinte forma. De (2.3): $\mathcal{A}_\alpha^2 = \tilde{\mathcal{A}}_\alpha^2 = \pm\mathcal{A}_\alpha\tilde{\mathcal{A}}_\alpha$, (2.3) também implica $\mathcal{A}_\alpha\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^* = \mathcal{A}_\alpha^*\tilde{\mathcal{A}}_\alpha$. Dessa forma, se $\mathcal{A}_\alpha\mathcal{A}_\alpha^* \geq 0$, e consequentemente $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^* \geq 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\alpha = \tilde{\mathcal{A}}_\alpha \quad &\rightarrow \quad \mathcal{Q} = \int d^dx\ \mathcal{A}_\alpha\mathcal{A}_\alpha^* \\ \mathcal{A}_\alpha = -\tilde{\mathcal{A}}_\alpha \quad &\rightarrow \quad \mathcal{Q} = -\int d^dx\ \mathcal{A}_\alpha\mathcal{A}_\alpha^* . \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dessa forma, é possível reescrever o funcional de energia (2.5) como

$$E = \frac{1}{2}\int d^dx \left[\mathcal{A}_\alpha \mp \tilde{\mathcal{A}}_\alpha\right]\left[\mathcal{A}_\alpha^* \mp \tilde{\mathcal{A}}_\alpha^*\right] \pm \frac{1}{2}\int d^dx \left[\mathcal{A}_\alpha\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^* + \mathcal{A}_\alpha^*\tilde{\mathcal{A}}_\alpha\right] \geq |\mathcal{Q}| \ , \tag{2.7}$$

onde, para soluções auto-duais, vale a igualdade da relação

$$E = \int d^dx\ \mathcal{A}_\alpha\mathcal{A}_\alpha^* = \int d^dx\ \tilde{\mathcal{A}}_\alpha\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^* = |\mathcal{Q}| \ . \tag{2.8}$$

A forma de separar o integrando de $\mathcal{Q}$ em (2.1) é bastante arbitrária, mas feita essa escolha ainda é possível realizar uma transformação simples da seguinte forma:

$$\mathcal{A}_\alpha \rightarrow \mathcal{A}'_\alpha = \mathcal{A}_\beta k_{\beta\alpha} \ ; \qquad \tilde{\mathcal{A}}_\alpha^* \rightarrow (\tilde{\mathcal{A}}'_\alpha)^* = k_{\alpha\beta}^{-1}\tilde{\mathcal{A}}_\beta^* \ . \tag{2.9}$$

Essa transformação não muda a forma da carga topológica, portanto $\mathcal{Q}$ continua invariante por transformações homotópicas dos campos. Logo, o mesmo desenvolvimento anterior para os funcionais $\mathcal{A}_\alpha$ e $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha$ pode ser repetido para os funcionais transformados $\mathcal{A}'_\alpha$ e $\tilde{\mathcal{A}}'_\alpha$. Assim, as novas equações de auto-dualidade são

$$\mathcal{A}_\beta k_{\beta\alpha} = \pm(k_{\alpha\beta}^{-1})^*\tilde{\mathcal{A}}_\beta \quad \rightarrow \quad \mathcal{A}_\beta h_{\beta\alpha} = \pm\tilde{\mathcal{A}}_\alpha \ , \tag{2.10}$$

em que foi definida a matriz inversível e hermitiana:

$$h \equiv kk^\dagger \ . \tag{2.11}$$

Junto com as identidades transformadas (2.2), as novas equações de auto-dualidade (2.10) implicam as equações de Euler-Lagrange do funcional

$$E' = \frac{1}{2}\int d^dx \left[\mathcal{A}_\alpha h_{\alpha\beta}\mathcal{A}_\beta^* + \tilde{\mathcal{A}}_\alpha h_{\alpha\beta}^{-1}\tilde{\mathcal{A}}_\beta^*\right] \ . \tag{2.12}$$

Note que a matriz h pode introduzir novos campos na teoria sem mudar a carga topológica.

Além disso, de (2.10): $\mathcal{A}_\alpha h_{\alpha\beta}\mathcal{A}_\beta^* = \tilde{\mathcal{A}}_\alpha h_{\alpha\beta}^{-1}\tilde{\mathcal{A}}_\beta^* = \pm\mathcal{A}_\alpha\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^* = \pm\mathcal{A}_\alpha^*\tilde{\mathcal{A}}_\alpha$. Portanto, se $\mathcal{A}_\beta h_{\beta\alpha}\mathcal{A}_\alpha^* \geq 0$, e consequentemente $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha h_{\alpha\beta}^{-1}\tilde{\mathcal{A}}_\beta^* \geq 0$, o limite inferior na energia (E' nesse caso) segue da mesma forma que anteriormente

$$\begin{aligned} E' = &\frac{1}{2}\int d^dx \left[\mathcal{A}_\beta k_{\beta\alpha} \mp (k_{\alpha\beta}^{-1})^*\tilde{\mathcal{A}}_\beta\right]\left[\mathcal{A}_\gamma^* k_{\gamma\alpha}^* \mp k_{\alpha\gamma}^{-1}\mathcal{A}_\gamma^*\right] \\ &\pm \frac{1}{2}\int d^dx \left[\mathcal{A}_\alpha\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^* + \mathcal{A}_\alpha^*\tilde{\mathcal{A}}_\alpha\right] \geq |\mathcal{Q}| \ . \end{aligned} \tag{2.13}$$

A seguir, serão examinadas algumas teorias em que são aplicadas as ideias discutidas nessa seção.

3 *KINKS* COM VÁRIOS CAMPOS EM (1+1) DIMENSÕES

Setores auto-duais para teorias em $(1+1)$ dimensões, contendo somente um campo escalar, como modelos de *sine-Gordon* e $\lambda\phi^4$, são conhecidos há bastante tempo. A aplicação das ideias discutidas nas seções anteriores levou a construção de setores auto-duais em teorias em $(1+1)$ dimensões com qualquer número de campos escalares (2). Nesta seção serão considerados campos escalares reais. A carga topológica nesse caso é

$$\mathcal{Q} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{\delta U}{\delta \varphi_a} \frac{\mathrm{d}\varphi_a}{\mathrm{d}x} = U(\varphi_a(x=\infty)) - U(\varphi_a(x=-\infty)) \ , \tag{3.1}$$

em que U é um funcional real arbitrário dos campos φ_a, $a = 1, 2, ..., r$, mas não de suas derivadas.[1] A equação acima está na mesma forma de (2.1), assim é possível realizar as identificações

$$\mathcal{A}_\alpha \equiv k_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}\varphi_\beta}{\mathrm{d}x} \ ; \qquad \tilde{\mathcal{A}}_\alpha \equiv \frac{\delta U}{\delta \varphi_\beta} k^{-1}_{\beta\alpha} \ , \tag{3.2}$$

onde os funcionais $\mathcal{A}_\alpha$, $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha$ e k são reais, e a matriz k também é inversível e arbitrária. De acordo com (2.10), as equações auto-duais são

$$\eta_{ab} \frac{\mathrm{d}\varphi_b}{\mathrm{d}x} = \pm \frac{\delta U}{\delta \varphi_a} \ ; \qquad \eta = k^T k \ . \tag{3.3}$$

Então, η é uma matriz simétrica e inversível. Seguindo (2.12), a energia estática da nossa teoria se torna

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \left[\frac{1}{2} \eta_{ab} \frac{\mathrm{d}\varphi_a}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}\varphi_b}{\mathrm{d}x} + V \right] \ , \tag{3.4}$$

onde a forma do potencial é

$$V = \frac{1}{2} \ \eta^{-1}_{ab} \ \frac{\delta U}{\delta \varphi_a} \frac{\delta U}{\delta \varphi_b} \ . \tag{3.5}$$

Portanto, dos argumentos da seção anterior, segue que as soluções de (3.3) são também soluções das equações de Euler-lagrange do funcional (3.4), onde a quantidade U desempenha o papel de um pré-potencial. Note que, dado a escolha de um pré-potencial U, é possível determinar o potencial V e também uma teoria de campos escalares com um setor auto-dual. Entretanto, dado um potencial, não é trivial encontrar o pré-potencial U; tendo isso em vista, será discutida a construção de teorias auto-duais por meio da escolha do pré-potencial. Nesse sentido, a análise será restringida para casos em que os campos escalares φ_a, o pré-potencial U e a matriz η sejam reais. Além disso, é imposto que o funcional E (3.4) seja positivo definido, dessa forma os autovalores de η também devem ser positivos.

---

[1] Isso será importante para que a carga topológica não seja função de derivadas de mais do que primeira ordem dos campos.

Para que as soluções auto-duais de (3.3) tenham energia finita, é necessário que a densidade de energia em (3.4) desapareça para infinitos espaciais quando evaluado nessas soluções, logo é necessário que

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_a}{\mathrm{d}x} \to 0 \; ; \qquad \frac{\delta U}{\delta \varphi_a} \to 0 \; ; \qquad \text{com} \qquad x \to \pm\infty. \tag{3.6}$$

Portanto, as equações de auto-dualidade (3.3) devem possuir soluções constantes de vácuo $\varphi_a^{(vac)}$ que sejam zeros para todas derivadas do pré-potencial, ou seja,

$$\left.\frac{\delta U}{\delta \varphi_c}\right|_{\varphi_a=\varphi_a^{(vac)}} = 0. \tag{3.7}$$

De (3.5), essas soluções de vácuo também são zeros do potencial V e de suas primeiras primeiras derivadas, ou seja,

$$V\left(\varphi_a^{(vac)}\right) = 0 \; ; \qquad \left.\frac{\delta V}{\delta \varphi_c}\right|_{\varphi_a=\varphi_a^{(vac)}} = 0 \; . \tag{3.8}$$

Ademais, é desejável que as teorias contruídas tenham diversas soluções tipo sóliton, e que tenham um sistema de vácuos tão degenerados quanto possível para manter as estruturas topológicas não triviais de $\mathcal{Q}$. Existem diversas formas de obter esse sistema de vácuos; nesse trabalho, será adotado o mesmo procedimento que em (2), baseado na teoria de grupos. Não será discutido o procedimento de criação dos pré-potenciais; para detalhes, consultar (2).

3.1 Interpretação mecânica de soluções auto-duais.

Tendo como base os desenvolvimentos em (3.6) e (3.7), soluções da equação de auto-dualidade (3.3) com energia finita devem tender a soluções constantes de vácuo quando $x \to \pm\infty$. Assim, cada uma dessas soluções conecta dois vácuos da teoria. Para desenvolver uma visualização geométrica dessas soluções, serão reescritas as equações de auto-dualidade da seguinte forma:

$$\vec{v} = \pm\vec{\nabla}_\eta U \; ; \qquad \text{com} \qquad (\vec{v})_a = \frac{\mathrm{d}\varphi_a}{\mathrm{d}x} \; ; \qquad \left(\vec{\nabla}_\eta U\right)_a = \eta^{-1}_{ab}\frac{\delta U}{\delta \varphi_b} \; . \tag{3.9}$$

Dado o potencial U e a métrica η, que é real, constante e positiva, $\vec{\nabla}_\eta U$ define curvas no espaço dos campos $(\varphi_1, \varphi_2, \; \ldots \; , \varphi_r)$,[2] fazendo o papel de vetor tangente a essas curvas. Essas curvas não se intersectam; para manter $\vec{\nabla}_\eta U$ bem definido em qualquer ponto do espaço dos campos, no máximo elas podem se tocar tangencialmente ou se encontrar

[2] O índice utilizado (r) a príncipio não possui qualquer significado, mas o uso se deu devido ao conceito de *rank* de uma álgebra de Lie. No caso das construções utilizando teoria de grupos: $r = rank\ (\mathcal{G})$.

em pontos em que $\vec{\nabla}_\eta U$ zera. A equação de auto-dualidade (3.3) é uma equação diferencial de primeira ordem, logo uma solução é determinada pelo valor dos campos φ_a em um ponto $x = x_0$.

A visão geométrica é a de uma partícula viajando no espaço dos φ_a com *x-velocidade* $\vec{v}$ e com a coordenada espacial x desempenhando o papel do tempo. Portanto, o problema de resolver a equação de auto-dualidade se reduz ao de construir curvas no espaço dos campos determinadas por $\vec{\nabla}_\eta U$. As soluções de energia finita correponderão às curvas que começam e terminam nos extremos do pré-potencial U, ou seja, nos pontos em que $\vec{\nabla}_\eta U = 0$.

Considere agora uma curva γ no espaço dos campos, parametrizada por x, ou seja, $\varphi_a(x)$, que seja solução das equações de auto-dualidade (3.3). Associada a essa curva é definida a quantidade

$$\tilde{\mathcal{Q}}(\gamma) = \int_\gamma \mathrm{d}x\ \vec{v} \cdot \vec{\nabla} U = \int_\gamma \mathrm{d}x\ \frac{\mathrm{d}\varphi_a}{\mathrm{d}x} \frac{\delta U}{\delta \varphi_a} = U(x_f) - U(x_i), \tag{3.10}$$

em que x_f e x_i são os pontos final e inicial, respectivamente, da curva γ. Perceba que o vetor tangente à curva é $\vec{\nabla}_\eta U$ e não $\vec{\nabla} U$, uma vez que a curva é solução das equações (3.3). Utilizando as equações de auto-dualiadade é possível reescrever a equação (3.10) da seguinte forma:

$$\tilde{\mathcal{Q}}(\gamma) = \pm \int_\gamma \mathrm{d}x\ \eta_{ab} \frac{\mathrm{d}\varphi_a}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}\varphi_b}{\mathrm{d}x} = \pm \int_\gamma \mathrm{d}x\ \omega_a \left(\frac{\mathrm{d}\tilde{\varphi}_a}{\mathrm{d}x} \right)^2, \tag{3.11}$$

em que a matriz η foi diagonalizada, ou seja,

$$\eta = \Lambda^T \eta^D \Lambda \ ; \qquad \Lambda^T \Lambda = \mathbb{1} \ ; \qquad \eta^D_{ab} = \omega_a \delta_{ab} \ ; \qquad \omega_a > 0 \ , \tag{3.12}$$

onde foi assumido que todos autovalores de η são positivos, e foi definido $\tilde{\varphi_a} = \Lambda_{ab}\varphi_b$. Mantendo η como positiva definida, a quantidade $\tilde{\mathcal{Q}}(\gamma)$ só pode assumir o valor zero se os campos forem constantes por toda curva, ou seja, a curva teria que se reduzir a um ponto. Logo, as soluções das equações de auto-dualidade (3.3) não podem começar e acabar em pontos no espaço dos campos em que o pré-potencial U possui o mesmo valor. Além disso, conforme alguém *anda* pela curva a diferença do valor do pré-potencial de um particular ponto e do ponto inicial sempre aumenta em módulo. Portanto, a curva, que é solução das equações (3.3), sempre *escala* o pré-potencial U, para cima ou para baixo dependendo do sinal tomado na equação (3.3), sem nunca retornar a uma altitude já atingida.

3.2 Exemplo – $SU(3)$

Nesta seção será apresentado um exemplo concreto dos conceitos discutidos nas seções (2) e (3). No exemplo que segue, a matriz η será constante[3], real e positiva definida. Mesmo com essas restrições ainda é possível construir teorias interessantes.

[3] Isto é, não irá depender dos campos φ_a da teoria ou de outros campos externos.

O *rank* de $SU(3)$ é dois, portanto a teoria possuirá dois campos φ_1 e φ_2. A matriz η é escolhida tal que[4]

$$\eta = \begin{pmatrix} 2 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{pmatrix} ; \qquad \eta^{-1} = \frac{1}{4-\lambda^2}\begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 2 \end{pmatrix} , \tag{3.13}$$

onde foi introduzido o parâmetro real λ. Os autovalores de η são $2 \pm \lambda$, portanto λ deve se manter no intervalo $2 < \lambda < -2$, para manter η positiva definida e inversível. Por meio de um procedimento utilizando teoria de grupos[5], é obtido o pré-potencial

$$U = \gamma_1 \cos(\varphi_1) + \gamma_2 \cos(\varphi_2) + \gamma_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) , \tag{3.14}$$

em que γ_1, γ_2 e γ_3 são constantes arbitrárias.

A energia estática (3.4) se torna

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \left[(\partial_x\varphi_1)^2 + (\partial_x\varphi_2)^2 - \lambda\partial_x\varphi_1\partial_x\varphi_2 + V(\varphi_1, \varphi_2) \right] , \tag{3.15}$$

onde o potencial (3.5) é dado por

$$\begin{aligned} V = &\frac{1}{\lambda^2-4}[-\gamma_1^2 \sin^2(\varphi_1) + \gamma_1 \sin(\varphi_1)(\gamma_3(\lambda-2)\sin(\varphi_1-\varphi_2) - \gamma_2\lambda\sin(\varphi_2)) \\ &- \gamma_2^2 \sin^2(\varphi_2) - \gamma_2\gamma_3(\lambda-2)\sin(\varphi_2)\sin(\varphi_1-\varphi_2) + \gamma_3^2(\lambda-2)\sin^2(\varphi_1-\varphi_2)] . \end{aligned} \tag{3.16}$$

As equações de auto-dualidade (3.3) são da forma

$$\begin{aligned} \partial_x\varphi_1 &= \pm\frac{[2\gamma_1\sin(\varphi_1) + \lambda\gamma_2\sin(\varphi_2) - \gamma_3(\lambda-2)\sin(\varphi_1-\varphi_2)]}{\lambda^2-4}, \\ \partial_x\varphi_2 &= \pm\frac{[2\gamma_2\sin(\varphi_2) + \lambda\gamma_1\sin(\varphi_1) + \gamma_3(\lambda-2)\sin(\varphi_1-\varphi_2)]}{\lambda^2-4}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Os vácuos são determinados pelas condições (3.7), que implicam

$$\gamma_1 \sin\left(\varphi_1^{(vac)}\right) = -\gamma_3 \sin\left(\varphi_1^{(vac)} - \varphi_2^{(vac)}\right) = -\gamma_2 \sin\left(\varphi_2^{(vac)}\right). \tag{3.18}$$

Certamente, a equação acima é satisfeita se

$$\varphi_a^{(vac)} = n_a\pi , \qquad n_a \in \mathbb{Z}, \qquad a = 1, 2 , \tag{3.19}$$

para qualquer valor para os coeficientes γ. Entretanto, existem outros tipos de vácuo que dependem do valor escolhido para cada γ, como

$$\begin{aligned} \left(\varphi_1^{(vac)}, \varphi_2^{(vac)}\right) &= \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\, n_1 \, , \, \frac{4\pi}{3} + 2\pi\, n_2\right) ; \qquad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1, \\ \left(\varphi_1^{(vac)}, \varphi_2^{(vac)}\right) &= \left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi\, n_1 \, , \, \frac{2\pi}{3} + 2\pi\, n_2\right) ; \qquad n_1 \, , \, n_2 \in \mathbb{Z} \, . \end{aligned} \tag{3.20}$$

4 Note que $\eta|_{\lambda=1} = K$, com K sendo a matriz de Cartan de $SU(3)$. (3)

5 A construção se baseia nos pesos das representações da algebra. Para mais detalhes consultar (2).

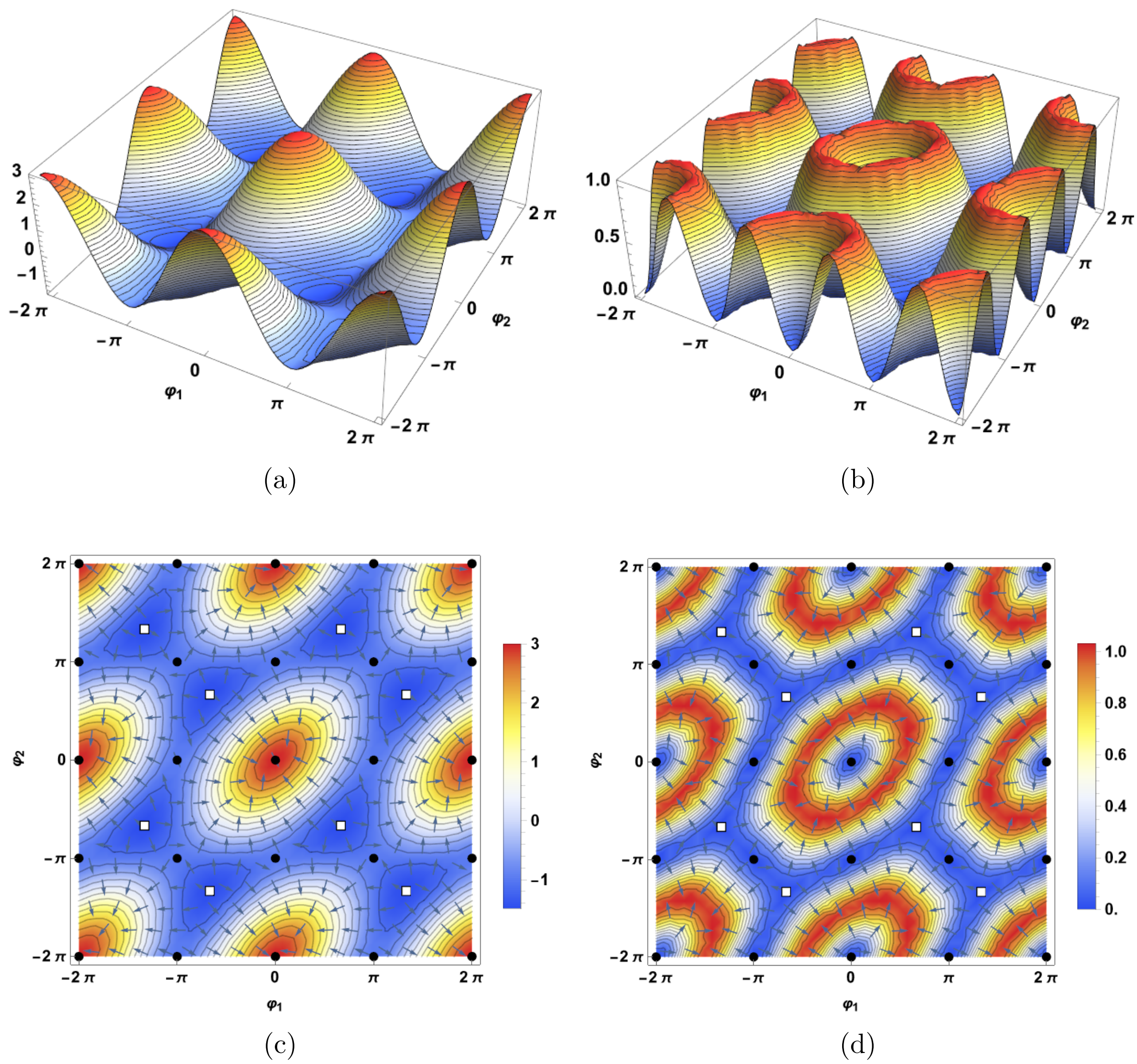

Figura 1 – (a) e (c) são representações do pré-potencial (3.14), e (b) e (c) do potencial (3.16). Os vácuos do tipo (3.19) são os pontos pretos, enquanto os do tipo (3.20) são denotados por quadrados em branco. As linhas representam o fluxo de $\vec{\nabla}U$ e $\vec{\nabla}V$, em que $\vec{\nabla} = (\partial_{\varphi_1}, \partial_{\varphi_2})$. Nos gráficos, foi utilizado $\lambda = 1$ e $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

4 *LUMPS* EM $(2+1)$ DIMENSÕES

Como um exemplo de uma teoria com um setor auto-dual, será considerado o modelo $\mathbb{CP}^{N-1}$ em (2+1) dimensões. $\mathbb{CP}^{N-1}$ é o espaço projetivo complexo de $(N-1)$ dimensões, ou seja, o espaço de todas as classes equivalentes de vetores complexos $z = (z_1\ ,\ z_2\ ,\ \ldots\ ,\ z_N)$, tal que dois vetores z e z' são equivalentes se $z' = \lambda z$, sendo λ um número complexo $(4, 5)$. Serão considerados os representantes dessas classes como os vetores unitários

$$z = (z_1, z_2, ..., z_N)\ ; \qquad\qquad z_a^* z_a = 1\ . \tag{4.1}$$

$\mathbb{CP}^{N-1}$ é isomórfico a $SU(N)/SU(N-1)\otimes U(1)$. De fato, o grupo $SU(N)$ age transitivamente nos vetores z por meio da sua representação definidora $N-$dimensional. Como essa representação é unitária, sua ação preserva o módulo dos vetores z, e um dado vetor é mantido invariante por matrizes $(N-1)\times(N-1)$ unitárias, ou seja, o subgrupo $U(N-1) = SU(N-1)\otimes U(1)$.

O segundo grupo de homotopia de $\mathbb{CP}^{N-1}$ é isomórfico aos inteiros sobre adição, ou seja, $\pi_2\left(SU(N)/SU(N-1)\otimes U(1)\right) = \mathbb{Z}$. A carga topológica associada possui uma representação integral da forma

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}^2x\ \varepsilon_{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\ , \tag{4.2}$$

onde

$$A_\mu = \frac{i}{2}\left(z^\dagger\partial_\mu z - \partial_\mu z^\dagger z\right)\ . \tag{4.3}$$

A integração em (4.2) é no plano bidimensional (x_1, x_2), que, identificando o infinito espacial, é isomórfico à S^2.[1] Sobre a transformação local $z \to e^{i\alpha}z$, será obtido $A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu\alpha$. Definindo a derivada covariante $D_\mu \equiv \partial_\mu + iA_\mu$, (4.2) pode ser reescrita como

$$\mathcal{Q} = \frac{i}{2\pi}\int \mathrm{d}^2x\ \varepsilon_{\mu\nu}\left(D_\mu z\right)^\dagger\left(D_\nu z\right) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^2x\left[\left(D_\mu z\right)^\dagger i\,\varepsilon_{\mu\nu}\,D_\nu z + \left(i\,\varepsilon_{\mu\nu}\,D_\nu z\right)^\dagger D_\mu z\right]. \tag{4.4}$$

Seguindo (2.9), são definidas as quantidades:

$$\mathcal{A}_\mu^a = \left(D_\mu z\right)_b k_{ba}\ ; \qquad\qquad \tilde{\mathcal{A}}_\mu^a = \left(k_{ab}^{-1}\right)^* i\,\varepsilon_{\mu\nu}\ \left(D_\nu z\right)_b\ , \tag{4.5}$$

logo a carga (4.4) pode ser escrita na forma (2.1). De (2.10), as equações de auto-dualidade são

$$\left(D_\mu z\right)_b h_{ba} = \pm\, i\,\varepsilon_{\mu\nu}\left(D_\nu z\right)_a\ . \tag{4.6}$$

De acordo com (2.12), o funcional da energia se torna

$$E = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^2x\left[\left(D_\mu z\right)_a^* h_{ab}\left(D_\mu z\right)_b + \left(D_\mu z\right)_a^* h_{ab}^{-1}\left(D_\mu z\right)_b\right]\ . \tag{4.7}$$

[1] Superfície da esfera tridimensional.

Contraindo os dois lados de (4.6) com $\varepsilon_{\rho\mu}$, obtém-se

$$(D_\mu z)_a = \pm\, i\, \varepsilon_{\mu\nu}\, (D_\nu z)_b\, h_{ba}\ . \tag{4.8}$$

Portanto, (4.6) e (4.8) implicam

$$(D_\mu z)_b \left(h_{ba} - h^{-1}_{ba}\right) = 0 \qquad \to \qquad h^2 = \mathbb{1}\ , \tag{4.9}$$

mas uma matriz hermitiana pode ser diagonalizada por uma transformação unitária, $h = U h_D U^\dagger$, com h_D diagonal. Logo

$$h^2 = \mathbb{1} \qquad\qquad \to \qquad\qquad h_D^2 = \mathbb{1}\ , \tag{4.10}$$

assim $\lambda_a^2 = 1$. Porém, para a energia E (4.7) ser positiva definida, é necessário que todos autovalores de h tenham o mesmo sinal. Então

$$h = \mathbb{1}\ . \tag{4.11}$$

Nesse caso, (4.6) reduz-se às equações de auto-dualidade para o modelo $\mathbb{CP}^{N-1}$ usual (4,5),

$$(D_\mu z)_a = \pm\, i\, \varepsilon_{\mu\nu}\, (D_\nu z)_a\ \ , \tag{4.12}$$

e (4.7) à energia usual do modelo $\mathbb{CP}^{N-1}$,

$$E = \int \mathrm{d}^2 x\, (D_\mu z)^\dagger\, D_\mu z\ . \tag{4.13}$$

Para construir soluções auto-duais da equação (4.12), é conveniente introduzir novos campos complexos u_a como

$$(u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, ..., u_{N-1}^{(j)}, u_N^{(j)}) = \frac{1}{z_j}(z_1, z_2, ..., z_{N-1}, z_N)\ , \tag{4.14}$$

em que $u_j^{(j)} = 1$, ou seja, as coordenadas são $u_\alpha^{(j)}, \alpha \neq j$. Pode ser escolhida qualquer componente z_a para construir o campo u_a; nesse caso, será escolhida a componente z_N, logo $u_\alpha, \alpha = 1, ..., N-1$ são as coordenadas. Podemos reescrever a equação (4.12) em termo das novas coordenadas da seguinte forma: (4)

$$\partial_\mu u_\alpha = \pm\, i\, \varepsilon_{\mu\nu}\, \partial_\nu u_\alpha\ ; \qquad\qquad \alpha = 1, 2, ..., N-1. \tag{4.15}$$

Essas são as equações de Cauchy-Riemann para os campos u. De fato, o sinal $(+)$ implica que u é holomórfico, ou seja, $u_\alpha = u_\alpha(\omega)$, e o sinal $(-)$ que u é anti-holomórfico, ou seja, $u_\beta = u_\beta(\omega^*)$, em que $\omega = x_1 + i x_2$.

5 $(3+1)$ DIMENSÕES E INSTANTONS EM $(4+0)$ DIMENSÕES

5.1 Monopolos

Será considerado o caso da carga magnética topológica definida pela integral no espaço de três dimensões $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{Q}_M = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x \, \varepsilon_{ijk} \, \mathrm{Tr}\left(F_{ij} D_k \Phi\right) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x \, \mathrm{Tr}\left(B_i D_i\right) \;, \tag{5.1}$$

onde $B_i = -\frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\,F_{jk}$ é o campo magnético não abeliano, $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i - ie[A_i, A_j] = F^a_{ij} T_a$ o tensor dos campos, $A_i = A^a_i T_a$ o campo de *gauge*, e $\Phi = \Phi^a T_a$ o campo de *Higgs* na representação adjunta de um grupo de Lie simples e compacto, com geradores $T_a\,,\; a = 1, 2, ..., \dim G$. Além disso, $D_i(*) = \partial_i(*) + ie[A_i, (*)]$ é a derivada covariante na representação adjunta de G.

Nesse caso todos os campos são reais. Logo, seguindo (2.10) e os resultados em (6), são introduzidas as quantidades reais

$$\mathcal{A}_\alpha \equiv B^b_i \, k_{ba} \;; \qquad\qquad \tilde{\mathcal{A}}_\alpha \equiv k^{-1}_{ab} (D_i \Phi)^b \;, \tag{5.2}$$

então (5.1) pode ser escrita como (2.1). As equações de auto-dualidade (2.10) se tornam

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk} F^b_{jk} \, h_{ba} = \pm (D_i \Phi)^a \;; \qquad\qquad h = k\,k^T \;, \tag{5.3}$$

com $h_{ab},\; a, b = 1, 2, ..., \dim G$, uma matriz simétrica e inversível de campos escalares. As equações (5.3) constituem uma generalização das equações *BPS* (*Bogomolny-Prasad-Sommerfield*) (7, 8) para monopolos auto-duais. O funcional de energia (2.12) se torna (6)

$$E_{YMH} = \int \mathrm{d}^3x \left[\frac{1}{4} h_{ab} F^a_{ij} F^b_{ij} + \frac{1}{2} h^{-1}_{ab} (D_i \Phi)^a (D_i \Phi)^b\right] \;, \tag{5.4}$$

portanto essa é uma teoria com campos de *gauge* A_μ, campo de Higgs Φ na representação adjunta do grupo de *gauge*, e campos escalares reais na matriz h. A energia (5.4) avaliada nas soluções auto-duais de (5.3) é igual à carga magnética topológica

$$E_{YMH} = \mathcal{Q}_M \;. \tag{5.5}$$

Para mais detalhes na construção de soluções auto-duais dessa teoria, consultar (6).

5.2 Skyrmions

Skyrmions são sólitons topológicos soluções de teorias em $(3+1)$ dimensões com o grupo $SU(2)$ como espaço-alvo. Os três campos em $SU(2)$ são interpretados como os três píons π^+, π^0 e π^-. Essas soluções são interpretadas seguindo a proposta de Skyrme (9, 10), em que a carga topológica desempenha o papel de número bariônico (11, 12).

A carga topológica relevante nesse caso é dada pela integral sobre o espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{Q}_B = \frac{i}{48\pi^2} \int \mathrm{d}^3x \, K(U) \, \varepsilon_{ijk} \, \mathrm{Tr}(R_i R_j R_k) \ , \tag{5.6}$$

com $R_i = i\partial_i U U^\dagger = R_i^a T_a$, $U \in SU(2)$, e $K(U)$ é um funcional real arbitrário dos campos quirais U, mas não de suas derivadas. K pode ser interpretado como uma deformação na métrica do espaço-alvo $SU(2)$. A notação utilizada é tal que $\mathrm{Tr}(T_a T_b) = \delta_{ab}$, com $T_a \, , \ a = 1, 2, 3$ sendo os geradores da álgebra de Lie de $SU(2)$.

Seguindo (2.1), serão definidas as quantidades reais

$$\mathcal{A}_\alpha \equiv \frac{\lambda}{24} \, \varepsilon_{ijk} \, \mathrm{Tr}(R_i R_j R_k) \ ; \qquad \tilde{\mathcal{A}}_\alpha \equiv K = \mu\sqrt{V} \ , \tag{5.7}$$

em que λ e μ são constantes de acoplamento, e V desempenha o papel de um potencial. As equações de auto-dualidade (2.3) se tornam

$$\frac{\lambda}{24} \, \varepsilon_{ijk} \, \mathrm{Tr}(R_i R_j R_k) = \pm \, \mu\sqrt{V} \ . \tag{5.8}$$

Assim, o funcional de energia se torna

$$E = \int \mathrm{d}^3x \left[\frac{\lambda^2}{(24)^2} B_0 B_0 + \mu^2 V \right] \ , \tag{5.9}$$

com $B_0 = \varepsilon_{ijk} \mathrm{Tr}(R_i R_j R_k)$. Esse modelo foi proposto em (13) e foi aplicado em muitos contextos em física de estrelas de neutrôns e nuclear (14). As soluções de (5.13) foram construídas utilizando um *ansatz* esfericamente simétrico, para o potencial $V = \mathrm{Tr}(1 - U)/2$, as soluções são de tal forma que os campos vão a zero para um valor finito de distância radial.

5.3 Um modelo mais geral do *Skyrme* auto-dual

Usando o fato de que as quantidades $R_i = i\partial_i U U^\dagger$ satisfazem a equação de Maurer-Cartan

$$\partial_\mu R_\nu - \partial_\nu R_\mu + i[R_\mu, R_\nu] = 0 \ , \tag{5.10}$$

podemos escrever a carga topológica (5.6), para $K = 1$, como

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_B &= \frac{i}{96\pi^2} \int \mathrm{d}^3x \ \varepsilon_{ijk} \mathrm{Tr}(R_i \ [R_j, R_k]) = -\frac{1}{96\pi^2} \int \mathrm{d}^3x \ \varepsilon_{ijk} \mathrm{Tr}(R_i(\partial_j R_k - \partial_k R_j)) \\ &= -\frac{1}{48\pi^2} \int \mathrm{d}^3x \ \varepsilon_{ijk} R_i^a \partial_j R_k^a \equiv -\frac{1}{48\pi^2} \frac{e_0}{m_0} \int \mathrm{d}^3x \ \mathcal{A}_i^a \tilde{\mathcal{A}}_i^a \ , \end{aligned} \tag{5.11}$$

em que foram introduzidas as quantidades reais

$$\mathcal{A}_i^a \equiv m_0 \ R_i^b k_{ba} \ ; \qquad \tilde{\mathcal{A}}_i^a \equiv \frac{1}{e_0} k_{ab}^{-1} \ \varepsilon_{ijk} \partial_j R_k^b \ , \tag{5.12}$$

sendo k_{ab} uma matriz inversível, m_0 e e_0 constantes de acoplamento. Logo, a carga topológica (5.6), para $K = 1$, pode ser escrita da mesma forma que (2.1). Com isso, as equações de auto-dualidade (2.3) se tornam

$$\lambda\ h_{ab} R_i^b = \frac{1}{2}\ \varepsilon_{ijk}\ H_{jk}^a \qquad \text{com} \qquad \lambda = \pm m_0 e_0\ , \tag{5.13}$$

onde $h = kk^T$ é uma matriz real, simétrica e inversível, e definimos $H_{ij}^a = \partial_i R_j^a - \partial_j R_i^a = \varepsilon_{abc} R_\mu^b R_\nu^c$. Dessa forma, o funcional de energia (2.12) se torna

$$E = \int \mathrm{d}^3x \left[\frac{m_0^2}{2} h_{ab} R_i^a R_i^b + \frac{1}{4e_o^2} h_{ab}^{-1} H_{ij}^a H_{ij}^b\right] . \tag{5.14}$$

A energia das soluções auto-duais de (5.13) é dada por

$$E = 48\pi^2 \frac{m_0}{e_0}\ |\mathcal{Q}|\ . \tag{5.15}$$

Essa teoria foi proposta em (15) e explorada mais a fundo em (16), em que as entradas da matriz h_{ab} são consideradas como seis campos reais adicionados à teoria. Note que, para $h = \mathbb{1}$ o modelo se reduz para o modelo original de *Skyrme*. A carga topológica (5.11) é interpretada, seguindo *Skyrme*, como o número bariônico. Mais recentemente, tal modelo foi extendido considerando uma potência fracional da densidade de carga topológica como um parâmetro de ordem para descrever um fluido de matéria bariônica. O modelo descreve com boa precisão a energia de ligação de mais de 240 núcleos, e também a relação entre seus raios e número bariônico.

5.4 Instantons

Como um último exemplo de aplicação dos métodos descritos no capítulo 2, será apresentado o caso de soluções de instantons para a teoria de Yang-Mills em quatro dimensões Euclidianas. A carga topológica relevante para esse caso é o número de Pontryagin

$$\mathcal{Q}_{YM} = \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{Tr}\Big(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\Big)\ , \tag{5.16}$$

sendo $F_{\mu\nu}$ o tensor dos campos e $\tilde{F}_{\mu\nu}$ seu dual de Hodge, ou seja,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ie[A_\mu, A_\nu]\ ; \qquad\qquad \tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, F^{\rho\sigma}\ , \tag{5.17}$$

sendo A_μ o potencial de gauge para um grupo compacto de Lie. Seguindo (2.1):

$$\mathcal{A}_\alpha \equiv F_{\mu\nu}\ ; \qquad\qquad \tilde{\mathcal{A}}_\alpha \equiv \tilde{F}_{\mu\nu}\ . \tag{5.18}$$

Assim, as equações de auto-dualidade (2.3) se tornam

$$F_{\mu\nu} = \pm\tilde{F}_{\mu\nu}\ , \tag{5.19}$$

e o funcional (2.5) se torna a ação Euclidiana de Yang-Mills [1]

$$S_{YM} = \frac{1}{8}\int \mathrm{d}^4x\Big[\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) + \mathrm{Tr}\Big(\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}\Big)\Big] = \frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu})\ . \tag{5.20}$$

As soluções de (5.19) são bem conhecidas e são chamadas de soluções *instanton* da teoria de Yang-Mills. Essas soluções desempenham papéis importantes na estrutura dos vácuos e também fenômenos não perturbativos em teorias de Yang-Mills (11, 17).

Seguindo (2.9), é possível introduzir uma matriz inversível, simétrica e real h_{ab} nas equações de auto-dualidade (5.19)

$$F^b_{\mu\nu}\,h_{ba} = \pm\tilde{F}^a_{\mu\nu}\ ; \qquad\qquad F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}T_a\ ,\ \tilde{F}_{\mu\nu} = \tilde{F}^a_{\mu\nu}T_a\ , \tag{5.21}$$

com T_a, $a = 1, 2, ..., \dim G$, sendo T_a uma base para a álgebra de Lie para o grupo de *gauge* G. Além disso, seguindo o mesmo procedimento que de (4.9 - 4.11) chegamos à conclusão de que $h = \mathbb{1}$.

[1] Aqui foi utilizado o fato de que $\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) = \mathrm{Tr}\Big(\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}\Big)$.

6 CONCLUSÃO

O objetivo desse trabalho foi revisar estruturas fundamentais do conceito de auto-dualidade, e mostrar algumas de suas principais aplicações em fenômenos não lineares em grande parte da física.

Primeiramente, foram descritas as principais estruturas envolvidas na aplicação do conceito de auto-dualidade generalizada, em que foram definidas a carga topológica ($\mathcal{Q}$) e as equações de auto-dualidade (2.3). Observou-se que, com a combinação das identidades, vindas da invariância homotópica da carga topológica, com as equações de auto-dualidade, foram obtidas as equações de Euler-Lagrange do funcional de energia (2.5). Além disso, foi possível demonstrar que as soluções auto-duais são aquelas que saturam o limite inferior de energia encontrado para as soluções gerais do funcional. Posteriormente, os conceitos discutidos foram generalizados com a matriz η, que pode introduzir novos campos na teoria; com essa modificação, foram obtidas as novas equações de auto-dualidade (2.10) e o novo funcional de energia (2.12).

Em seguida, foram desenvolvidos exemplos conhecidos de aplicações do conceito de auto-dualidade, esses sendo *Kinks* em $(1+1)$ dimensões, *Lumps* em $(2+1)$ dimensões, um modelo básico de *Skyrmions* e monopolos em $(3+1)$ dimensões e por último a teoria de *Instantons* em quatro dimensões euclidianas. Destacou-se o desenvolvimento de um paralelo geométrico para a teoria de *Kinks*, onde se provou que essas curvas no espaço dos campos devem escalar para cima ou para baixo o pré-potencial e que as soluções com energia finita são as curvas que começam e terminam em seus vácuos. Além disso, desenvolveu-se um exemplo concreto, em $(1+1)$ dimensões, da criação de uma teoria a partir do pré-potencial, usando um método baseado em teoria de grupos, especificamente a estrutura de pesos da álgebra de $SU(3)$.

No geral, o presente trabalho expôs as principais estruturas do conceito de auto-dualidade e algumas de suas aplicações de maior impacto na física contemporânea. Ainda assim, como dito em (2), há muito a ser explorado no conceito de auto-dualidade e novos desenvolvimentos impactantes são esperados no futuro.

REFERÊNCIAS

1 ADAM, C. *et al.* Some aspects of self-duality and generalised BPS theories. **Journal of High Energy Physics**, v. 2013, n. 8, p. 1–26, 2013.

2 FERREIRA, L. A.; KLIMAS, P.; ZAKRZEWSKI, W. J. Self-dual sectors for scalar field theories in (1+ 1) dimensions. **Journal of High Energy Physics**, v. 2019, n. 1, p. 1–38, 2019.

3 FERREIRA, L. A. Lecture notes on Lie algebras and Lie groups. **São Paulo, Instituto de Física Teórica-IFT/Universidade Estadual Paulista-UNESP**, 2000.

4 D'ADDA, A.; LÜSCHER, M.; VECCHIA, P. D. A 1n expandable series of non-linear σ models with instantons. **Nuclear Physics B**, v. 146, n. 1, p. 63–76, 1978.

5 ZAKRZEWSKI, W. J. Low-dimensional sigma models. **New York: CRC Press**, 1989.

6 FERREIRA, L. A.; MALAVAZZI, H. Generalized self-duality for the Yang-Mills-Higgs system. **Physical Review D**, v. 104, n. 10, p. 105016, 2021.

7 BOGOMOLNY, E. Stability of classical solutions. **Soviet Journal of Nuclear Physics**, v. 24, p. 449, 1976.

8 PRASAD, M.; SOMMERFIELD, C. M. Exact classical solution for the't Hooft monopole and the Julia-Zee dyon. **Physical Review Letters**, v. 35, n. 12, p. 760, 1975.

9 SKYRME, T. H. R. A non-linear field theory. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences**, v. 260, n. 1300, p. 127–138, 1961.

10 SKYRME, T. H. R. A unified field theory of mesons and baryons. **Nuclear Physics**, v. 31, p. 556–569, 1962.

11 MANTON, N.; SUTCLIFFE, P. **Topological solitons**. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

12 SHNIR, Y. M. **Topological and non-topological solitons in scalar field theories**. Cambridge: Cambridge University Press, 2018.

13 ADAM, C.; SANCHEZ-GUILLEN, J.; WERESZCZYŃSKI, A. A Skyrme-type proposal for baryonic matter. **Physics Letters B**, v. 691, n. 2, p. 105–110, 2010.

14 ADAM, C. *et al.* BPS Skyrmions as neutron stars. **Physics Letters B**, v. 742, p. 136–142, 2015.

15 FERREIRA, L. A. Exact self-duality in a modified Skyrme model. **Journal of High Energy Physics**, v. 2017, n. 7, p. 1–13, 2017.

16 FERREIRA, L. A.; LIVRAMENTO, L. R. Self-duality in the context of the skyrme model. **Journal of High Energy Physics**, v. 2020, n. 9, p. 1–25, 2020.

17 BELAVIN, A. A. *et al.* Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations. **Physics Letters B**, v. 59, n. 1, p. 85–87, 1975.